TD n° 13 : Probabilités

1 Rappels et propriétés de bases

Exercice 1. *Traduction*

On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note

$$A_i = \{\text{Obtenir « pile » au } i\text{-ème lancer}\}.$$

1. Définir par une phrase sans vocabulaire mathématique chacun des événements :

   a) $B_1 = \bigcup_{i=1}^{5} A_i$ b) $B_2 = \bigcap_{i=3}^{+\infty} \overline{A_i}$

   c) $B_3 = \left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=5}^{+\infty} \overline{A_i}\right)$ d) $B_4 = \bigcup_{i>6} A_i$

2. Écrire à l'aide des A_i les événements :

$$D_n = \{\text{N'obtenir plus que des « pile » à partir du } n\text{-ème lancer}\}$$
$$D = \{\text{N'obtenir plus que des « pile » à partir d'un certain lancer}\}.$$

Exercice 2. *Vérification probabilité*

Soient λ un réel strictement positif et P l'application définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(\{n\}) = (1 - e^{-\lambda})\, e^{-\lambda n}.$$

1. Montrer que P définie une probabilité sur $\mathbb{N}$.
2. Soit A l'événement « le nombre est pair ». Calculer $P(A)$.

Exercice 3. ★ *Une limite*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

Exercice 4. *Premier six*

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. On cherche à calculer la probabilité de l'événement A : « tous les nombres obtenus sont pairs ». Pour cela, on introduit :

— $\forall n \in \mathbb{N}^*$, A_n : « les $n-1$ premiers lancers donnent 2 ou 4 et le n^e donne 6 » ;

— $\forall i \in \mathbb{N}^*$, B_i : « le i^e lancer donne 2 ou 4 » ;

— $\forall i \in \mathbb{N}^*$, C_i : « le i^e lancer donne 6 ».

1. Exprimer $P(A)$ en fonction des $P(A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer A_n en fonction des B_i et C_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
3. En déduire la valeur de $P(A_n)$ puis celle de $P(A)$.

Exercice 5. ★ *Motifs dans une suite de lancers*

On considère une suite infinie de lancers d'une pièce de monnaie (on note P pour pile et F pour face) avec laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0\,;1[$ et celle d'obtenir face $q = 1-p$.

1. Calculer la probabilité que la première séquence PF apparaisse avant la première séquence FP.
2. Calculer la probabilité que la première séquence PF apparaisse avant la première séquence FF.
3. Calculer la probabilité que la première séquence PP apparaisse avant la première séquence FF.

Exercice 6. *Conforme à l'intuition*

On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant pour probabilité $p \in]0\,;1[$ de tomber sur pile.

1. Montrer qu'on obtient presque sûrement au moins une fois pile.
2. ★ Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient presque sûrement au moins k fois pile.
3. En déduire qu'on obtient de manière presque sûre une infinité de pile.

Exercice 7. *De deux manières*

Une urne contient deux boules bleues et une boule orange. On effectue une infinité de tirages successifs avec remise. On note E l'événement « on obtient au moins une boule orange ».

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit F_n : « on obtient la première boule orange au n-ème tirage ».
   Exprimer E à l'aide des F_n puis calculer $P(E)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit G_n : « on obtient aucune boule orange au cours des n premiers tirages ».
   Exprimer E à l'aide des G_n puis calculer $P(E)$.

Exercice 8. ★ *Lemmes de Borel-Cantelli*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements et note A l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à une infinité de A_n.

1. Écrire l'ensemble A en fonction des A_n et en déduire que A est un événement.
2. On suppose ici que la série $\sum P(A_n)$ converge. Montrer que $P(A) = 0$.
3. On suppose désormais que la série $\sum P(A_n)$ diverge et que la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante.
   a) Montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leqslant n$, on a
   $$P\left(\bigcap_{k=m}^{n} \overline{A_k}\right) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=m}^{n} P(A_k)\right).$$
   b) Montrer que $P(A) = 1$.

Exercice 9. *À l'impossible nul n'est tenu*

Montrer qu'un événement négligeable est indépendant de tout autre événement.

Exercice 10. *Subtilité de l'indépendance*

On lance n fois une pièce équilibrée. On note A_n l'événement « on obtient au moins une fois pile et au moins une fois face au cours des n lancers » et B_n l'événement « on obtient au plus une fois pile au cours des n lancers ».

1. Pour tout $n \geqslant 2$, calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.
2. Les événements A_n et B_n sont-ils indépendants si $n = 2$?
3. Même question si $n = 3$.
4. ★ Même question si $n \geqslant 4$.

2 Probabilités conditionnelles

Exercice 11. *Manipulation des formules*

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P).
On suppose que $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ et $P(A \cup B) = \dfrac{4}{9}$.
Calculer

a) $P(A \cap B)$ b) $P_B(A)$ c) $P_B(\overline{A})$
d) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ e) $P_B(A \cap \overline{B})$

Exercice 12. *Test de dépistage*

La trisomie 21, aussi appelé syndrome de Down, est une anomalie génétique dont l'incidence est d'environ 1 pour 770 naissances. On dispose d'un test de dépistage prénatal de recherche d'ADN fœtal dont les caractéristique sont les suivantes :

— la probabilité qu'un embryon atteint de trisomie 21 ait un test positif est de 99,79 % (sensibilité du test) ;

— la probabilité qu'un embryon non atteint de trisomie 21 ait un test négatif est de 99 % (spécificité du test).

1. À première vue, que pensez-vous de la fiabilité de ce test ?
2. Calculer la probabilité qu'un embryon soit atteint de trisomie 21 sachant que son test est positif.
3. Calculer la probabilité qu'un embryon ne soit pas atteint de trisomie 21 sachant que son test est négatif.
4. Que pensez-vous désormais de ce test ?

Exercice 13. *Avec une suite arithmético-géométrique*
Un élève est souvent absent. On suppose que le premier jour, l'élève est absent avec une probabilité $p_1 \in [0\,;1]$. Ensuite, s'il est absent un jour donné, il est absent le lendemain avec une probabilité $\frac{1}{10}$ mais s'il n'est pas absent un jour donné, il le sera le lendemain avec une probabilité $\frac{2}{5}$. On note p_n la probabilité que l'élève soit absent le n-ème jour.

1. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire l'expression de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_n$. Interpréter le résultat.

Exercice 14. *Chaîne de Markov (d'après CCINP MP n° 101)*
Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement « l'animal est en A (resp. B, C) après son $n^{\text{ième}}$ trajet ». On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   b) Exprimer de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.
   b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
   c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Expliquer comment les résultats de la question précédente peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 15. *Modèle de Galton-Watson*
On étudie la descendance d'une fleur. À l'instant 0, on dispose d'une fleur F_0. À l'instant 1, celle-ci a soit deux descendantes avec probabilité 0,3, soit une descendante avec probabilité 0,5, soit aucune descendante avec probabilité 0,2, puis F_0 meurt. Les descendantes de la première fleur ont, à l'instant 2, des descendantes de manière indépendante les unes des autres et dans les mêmes conditions que la première fleur, puis elles meurent, et ainsi de suite.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n : « la lignée de la fleur F_0 est éteinte à l'instant n » et $u_n = P(E_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que la suite (u_n) est convergente vers une limite $\ell \in [0\,;1]$.
3. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}3u_n^2 + 0{,}5u_n + 0{,}2$.
4. Déterminer la valeur de ℓ.
5. En déduire la probabilité que la lignée s'arrête.

Exercice 16. ★ *Ruine du joueur*
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs A et B ont initialement des fortunes respectives de a et $N - a$ euros ($a \in [\![0\,;N]\!]$). Ils s'affrontent dans un jeu constitué d'une succession de parties indépendantes. À chaque partie, le joueur A a une probabilité $p \in \,]0\,;1[$ de gagner et B une probabilité $q = 1 - p$ de gagner. À l'issue de chaque partie le perdant donne 1 euro au gagnant. Le jeu s'arrête lorsqu'un des deux joueurs est ruiné. Enfin, on note $R_N(a)$ la probabilité que ce soit A qui finisse ruiné.

1. Donner $R_N(0)$, $R_N(N)$ puis, pour tout $a \in [\![1\,;N-1]\!]$, déterminer une relation entre $R_N(a)$, $R_N(a+1)$ et $R_N(a-1)$.
2. En déduire l'expression de $R_N(a)$ en fonction de a et N.
3. Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement au bout d'un nombre fini de parties.
4. Pour a fixé, calculer $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N(a)$ et interpréter le résultat.